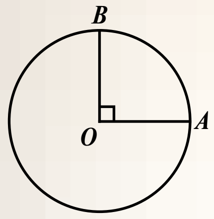
МАТЕМАТИКА

Сьогодні ми розберемо частину завдань, які стосуються планіметрії, а також ті, що присвячені стереометрії

ЗАВДАННЯ №4 (СЕСІЯ 2):
На рисунку зображено коло з центром в точці O, довжина якого дорівнює 64 см. Визначте довжину меншої дуги AB кола, якщо $\angle AOB = 90^\circ$



А	Б	В	Г	Д
4 см	8 см	16 см	32 см	48 см

РОЗВ'ЯЗАННЯ:
Кут в 90° становить четверту частину від всього кола (360°). Тому йому відповідає дуга, що становить четверту частину довжини всього кола, тобто **64 : 4 = 16 см.**

ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: В.

ЗАВДАННЯ №8 (СЕСІЯ 2):
Укажіть *хибне* твердження.

- А) Протилежні сторони паралелограма рівні.
- Б) Сума двох кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°.
- В) Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.
- Г) Площа паралелограма дорівнює добутку двох сусідніх сторін на синус кута між ними.
- Д) Площа паралелограма дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.

РОЗВ'ЯЗАННЯ:
Хибним твердженням є Д, бо площа паралелограма дорівнює не половині, а добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.

ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: Д.

ЗАВДАННЯ №9 (СЕСІЯ 1):
При якому значенні x вектори $\bar{a}(2;x)$ і $\bar{b}(-4;10)$ перпендикулярні?

А	Б	В	Г	Д
-5	-0,8	0,8	5	20

РОЗВ'ЯЗАННЯ:
Щоб вектори були перпендикулярними, кут між ними повинен дорівнювати 90^0. У свою чергу, кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ обчислюється з формули косинуса кута $(\bar{a}\hat{\ }\bar{b})$:

$$\cos(\bar{a}\hat{\ }\bar{b}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$$

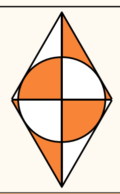
Ця формула є наслідком означення **скалярного добутку** (скалярним добутком $\bar{a}\cdot\bar{b}$ двох ненульових векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається число (скаляр), що дорівнює добутку числових значень довжин $|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$ цих векторів і косинусу кута між ними: $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos(\bar{a}\hat{\ }\bar{b})$.

Враховуючи усе вищесказане, робимо висновок, що у нашому випадку скалярний добуток повинен дорівнювати нулю, бо $\cos 90^0 = 0$. Але оскільки вектори задано координатами, то скалярний добуток знаходиться за таким правилом: $\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$, де $\bar{a}(x_1;y_1)$, $\bar{b}(x_2;y_2)$.

Маємо: $\bar{a}\cdot\bar{b} = 2\cdot(-4) + x\cdot 10 = 0$, $10x = 8$, $x = 0{,}8$.

ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: В.

ЗАВДАННЯ №14 (СЕСІЯ 2):
На рисунку зображено ромб, площа якого дорівнює **96 см²**. У ромб вписано коло. Визначте площу зафарбованої фігури.

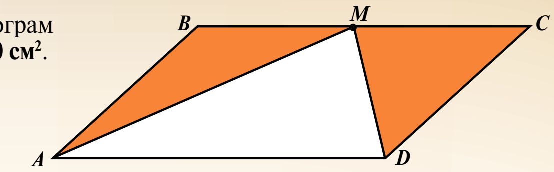


А	Б	В	Г	Д
24 см²	32 см²	48 см²	64 см²	72 см²

РОЗВ'ЯЗАННЯ:
Уважно розглянувши рисунок, бачимо, що за умови симетричного перенесення зафарбованих частин зліва направо отримаємо зафарбовану половину ромба. Тому, площа зафарбованої частини дорівнює половині площі ромба, тобто **0,5 · 96 = 48 см².**

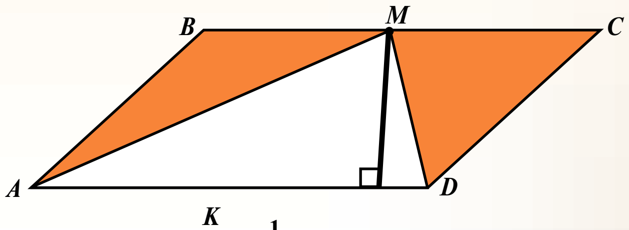
ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: В.

ЗАВДАННЯ №16 (СЕСІЯ 1):
На рисунку зображено паралелограм $ABCD$, площа якого дорівнює **60 см²**. Точка M належить стороні BC. Визначте площу фігури, що складається з двох зафарбованих трикутників.



А	Б	В	Г	Д
45 см²	40 см²	35 см²	30 см²	20 см²

РОЗВ'ЯЗАННЯ:
1 спосіб. Проведемо висоту у трикутнику AMD — MK (висота трикутника — це відрізок, що виходить із вершини та перпендикулярний до протилежної сторони).

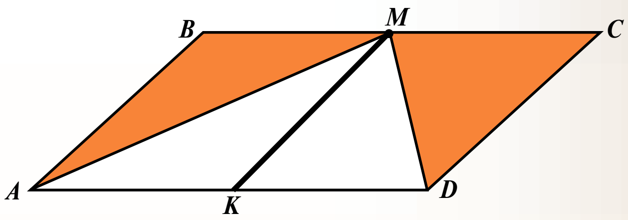


Площа трикутника AMD знаходиться за формулою: $S = \frac{1}{2} AD \cdot MK$.

Площа паралелограма знаходиться за формулою: $S = AD \cdot MK$ (площа дорівнює добутку сторони на висоту, яка проведена до цієї сторони). Бачимо, що площа трикутника дорівнює половині площі паралелограма. Тоді зафарбована частина становить також половину площі паралелограма. Тобто **0,5 · 60 = 30 см².**

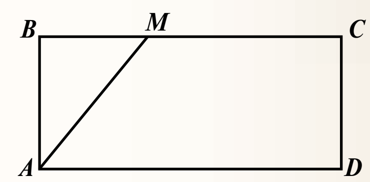
2 спосіб.

Проведемо $MK \,||\, AB \,||\, CD$. MK розбиває початковий паралелограм на два паралелограма. Розглянемо паралелограм $ABMK$. Діагональ AM розбиває його на два рівних трикутника (площі у них таким чином однакові). Один з цих трикутників зафарбований, тобто площа зафарбованого трикутника ABM дорівнює половині площі паралелограма $ABMK$. Аналогічно площа зафарбованого трикутника MCD дорівнює половині площі паралелограма $KMCD$. Маємо, що площа зафарбованої частини на рисунку дорівнює половині площі всього паралелограма, тобто знову отримаємо: **0,5 · 60 = 30 см².**



ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: Г.

ЗАВДАННЯ №28 (СЕСІЯ 2):
Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає його більшу сторону BC в точці M. Визначте радіус кола (у см), описаного навколо прямокутника, якщо $BC = 24$ см, $AM = 10\sqrt{2}$ см.



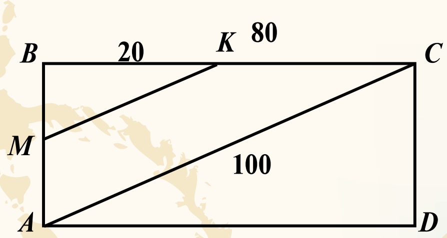
РОЗВ'ЯЗАННЯ:
Відповідно до правила, центр кола, описаного навколо прямокутника, є серединою діагоналі AC (тобто AC — діаметр цього кола). Щоб знайти довжину діагоналі AC, необхідно знайти величину сторони AB. Для цього розглянемо трикутник ABM. Цей трикутник прямокутний, рівнобедрений (бісектриса AM ділить прямий кут навпіл, тобто кут BAM дорівнює 45°). За умовою $AM = 10\sqrt{2}$ см. Тоді, за теоремою Піфагора, отримаємо: $AB^2 + BM^2 = AM^2$; $AB = BM$, тому $2\cdot AB^2 = AM^2 = (10\sqrt{2})^2 = 100\cdot 2$; $AB = 10$ **см.** Тепер розглянемо трикутник ABC. Він — прямокутний. Тож, використавши теорему Піфагора, маємо: $AC^2 = AB^2 + BC^2$; $AC^2 = 100 + 576 = 676$ **см²**; $AC = 26$ **см.** Оскільки це діаметр кола, то його радіус дорівнює **13 см.**

ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: 13 СМ.

ЗАВДАННЯ №18 (СЕСІЯ 1):
У прямокутнику $ABCD$: $BC = 80$, $AC = 100$. Через точки M і K, що належать сторонам AB і BC відповідно, проведено пряму, паралельну AC. Знайдіть довжину більшої сторони трикутника MBK, якщо $BK = 20$.

А	Б	В	Г	Д
60	50	30	25	15

РОЗВ'ЯЗАННЯ:
Оскільки $MK \,||\, AC$, то $\angle BKM = \angle BCA$ (відповідні кути при палалельних прямих та січній BC). Тому у трикутниках ABC та MBK по два рівних кути (прямий та пара вказаних). Можемо зробити висновок, що ці трикутники — подібні (ознака подібності за двома кутами). Для розв'язання задачі згадаємо, що у подібних трикутників відповідні сторони пропорційні.



Тому, $\frac{BK}{BC} = \frac{MK}{AC}$, $\frac{20}{80} = \frac{MK}{100}$, $MK = 25$.

ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: Г.